模块五 零点与不等式

第 1 节 函数零点小题策略：不含参（★★☆）

强化训练

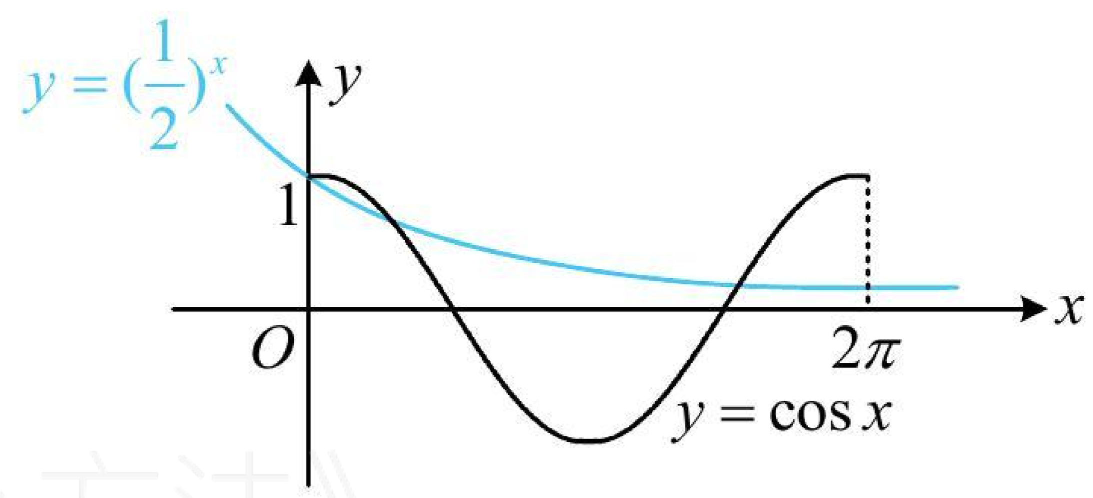
1．（2022・四川模拟・★★）已知函数 $f(x)=(\frac{1}{2})^x-\cos x$，则 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的零点个数为（　　）

（A）4　（B）3　（C）2　（D）1

答案：B

解析：将 $f(x)=0$ 变形，便于作图分析交点个数，$f(x)=0\Leftrightarrow(\frac{1}{2})^x=\cos x$，

作出 $y=(\frac{1}{2})^x$ 和 $y=\cos x$ 在 $[0,2\pi]$ 上的图象如图，两图象有 3 个交点 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上有 3 个零点.



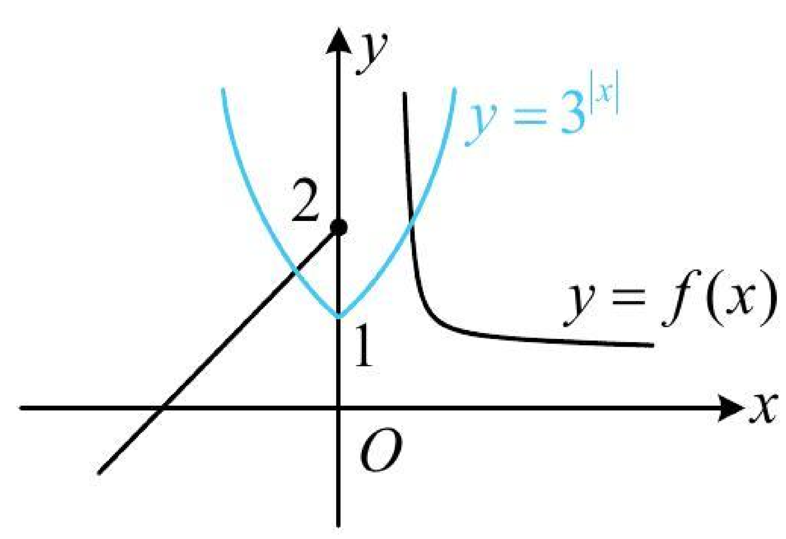
2．（2022・广东深圳期末・★★）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x},x>0\\x+2,x\le 0\end{cases}$，则方程 $f(x)-3^{|x|}=0$ 的解的个数为（　　）

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3

答案：C

解析：将 $f(x)-3^{|x|}=0$ 变形，便于作图研究交点，$f(x)-3^{|x|}=0\Leftrightarrow f(x)=3^{|x|}$，

如图，$y=f(x)$ 和 $y=3^{|x|}$ 的图象有 2 个交点，所以方程 $f(x)-3^{|x|}=0$ 有 2 个解.



3．（2023・天津模拟・★★）函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x+3}-3,x\le 0\\2x^2-7x+4-\ln x,x>0\end{cases}$ 的零点个数为_____.

答案：3

解析：观察发现第一段的零点可求，故直接求，

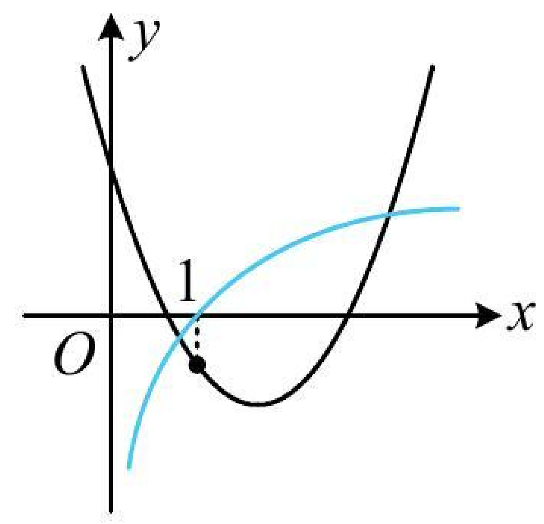
当 $x\le 0$ 时，令 $f(x)=0$ 可得 $2^{x+3}-3=0$，解得：$x=\log_2 3-3$；

第二段的零点不可求，故变形后画图看交点，

当 $x>0$ 时，令 $f(x)=0$ 可得 $2x^2-7x+4-\ln x=0$，所以 $2x^2-7x+4=\ln x$，

如图，注意到 $x=1$ 处 $y=2x^2-7x+4$ 在 $y=\ln x$ 的下方，所以两图象有 2 个交点，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 2 个零点；

综上所述，$f(x)$ 的零点个数为 3.



4.（2023•全国甲卷（改）•★★★）函数 $f(x)=-\sin 2x$ 的图象与直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 的交点个数为（　　）

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

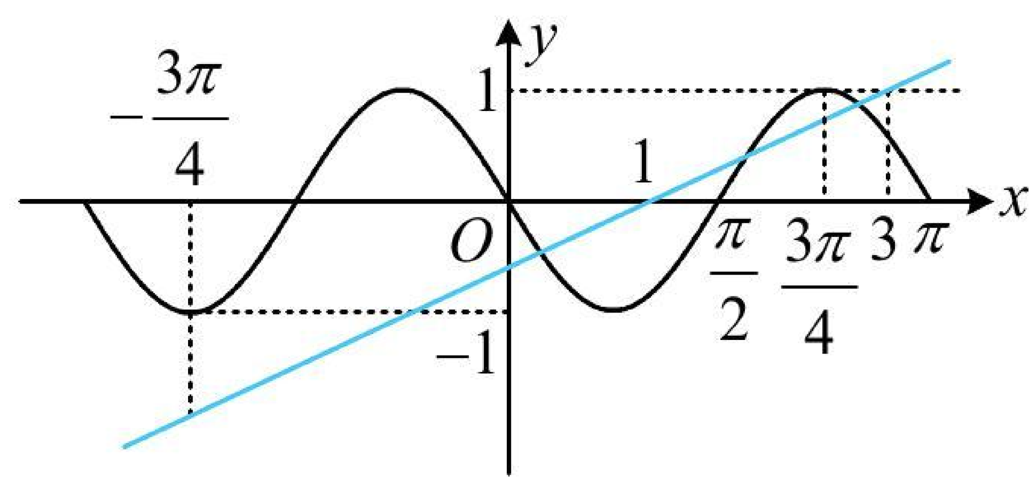
答案：C

解析：由题意，$f(x)$ 的最小正周期 $T=\pi$，

如图，容易看出 y 轴左侧二者没有交点，而 y 轴右侧，$y=-\sin 2x$ 在直线 $y=1$ 上方没有图象，故可抓住蓝色直线穿出 $y=1$ 的位置来分析，

在 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 中令 $y=1$ 可得 $x=3$，如图，$\frac{3\pi}{4}<3<\pi$，

所以直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 与 $f(x)$ 的图象共 3 个交点.



5.（★★★）设 $f(x)=\begin{cases} e^x+1, x\ge 0 \\ |x^2+2x|, x<0 \end{cases}$，则 $g(x)=f(x)-ex-1$ 的零点个数为（　　）

（A）4　（B）3　（C）2　（D）1

答案：C

解析：分段函数研究零点个数，可分段考虑，

当 $x\ge 0$ 时，$g(x)=f(x)-ex-1=e^x-ex$，所以 $g(x)=0\Leftrightarrow e^x=ex$，接下来借助图象分析交点，

如图 1，直线 $y=ex$ 与曲线 $y=e^x$ 正好相切于 $x=1$ 处，它们只有 1 个交点 $\Rightarrow g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有 1 个零点；

当 $x<0$ 时，$g(x)=0\Leftrightarrow |x^2+2x|=ex+1$，此方程不易求解，故作图看交点，

如图 2，由图可知直线 $y=ex+1$ 与函数 $y=|x^2+2x|(x<0)$ 的图象有 1 个交点，

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上有 1 个零点，故 $g(x)$ 共有 2 个零点.

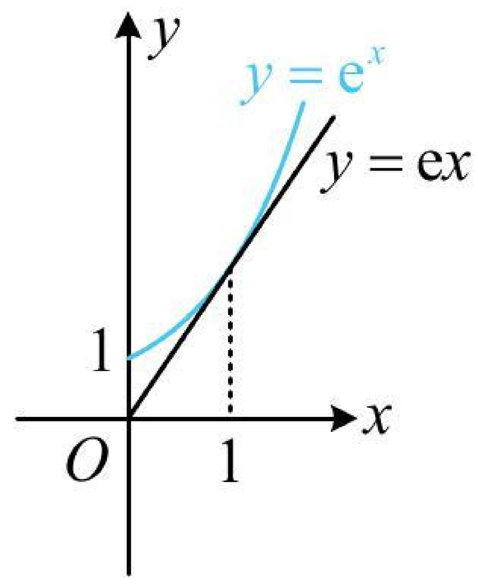


图1

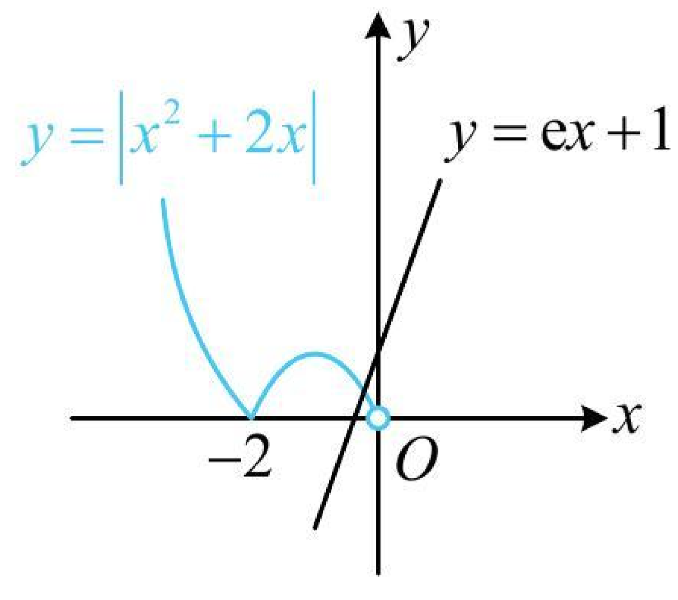


图2

【反思】本题若将 $g(x)=f(x)-\mathrm{e}x-1$ 换成 $g(x)=f(x)-3x-1$，你会做吗？在 $[0,+\infty)$ 上，原来的曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线 $y=\mathrm{e}x$ 变成割线 $y=3x$，如图 3，交点增加 1 个.

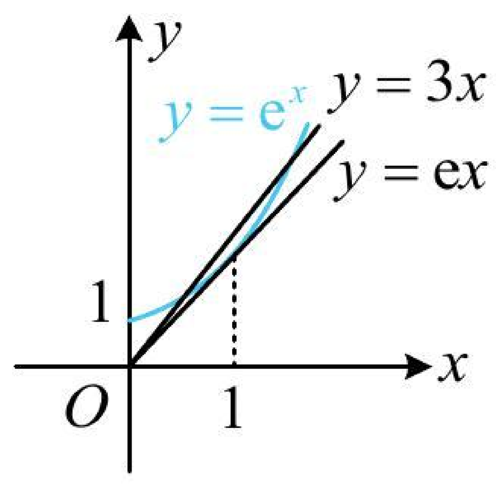


图3

6.（2023・全国模拟・★★★）$f(x)=5\sin\dfrac{\pi}{2}x-|x-1|$ 的所有零点之和为_____.

答案：6

解析：方程 $f(x)=0$ 无法求解，故变形画图看交点，

$f(x)=0\Leftrightarrow 5\sin\dfrac{\pi}{2}x=|x-1|$，如图，$y=\sin\dfrac{\pi}{2}x$ 和 $y=|x-1|$ 的图象有 6 个交点，

且两图象都关于直线 $x=1$ 对称，所以它们的交点也关于 $x=1$ 对称，以图中的 A，B 两个交点为例，

有 $\dfrac{x_A+x_B}{2}=1$，所以 $x_A+x_B=2$，同理，另外两组对称交点的横坐标之和也分别都为 2，

故 $f(x)$ 的所有零点之和为 6.